Rechnen in der Physik – Selbstlernmaterial

1 Physikalische Größen

„Wie lang ist der Tisch?“ Die Frage kann man auf verschiedene Weisen beantworten:

- „Der Tisch ist halb so lang wie das Bett.“
- „Der Tisch ist so lang wie 3 Lineale.“
- „Der Tisch ist 4 mal so lang wie mein Fuß.“

In allen Fällen wurde dasselbe gemacht: Man vergleicht die Länge des Bettes mit einer anderen (der Einheit) und gibt an, um wie viel (der Zahlenwert) länger oder kürzer das Bett ist. Das gleiche macht man immer, wenn man eine physikalische Größe angibt:

$$\textbf{Physikalische Größe} = \textbf{Zahlenwert} \cdot \textbf{Einheit}$$

Man kann also schreiben:

- Länge des Tisches $= \frac{1}{2} \cdot$ Bett
- Länge des Tisches $= 3 \cdot$ Lineale
- Länge des Tisches $= 4 \cdot$ Fuß

Bei den hier verwendeten Vergleichen (den Einheiten) taucht jedoch das Problem auf, dass sie nicht überall gleich sind. Es gibt verschieden lange Betten, Lineale und Füße. Eine solche Längenangabe funktioniert also nur, wenn man sie für sich selbst aufschreibt (dann weiß man ja, welches Bett und welcher Fuß gemeint ist), oder wenn alle wissen, welcher Fuß gemeint ist. Früher hatte man deshalb außen an Rathäusern Metallstangen angebracht, die festlegten, wie lang der „Einheitsfuß“ sei. Allerdings war das oft von Stadt zu Stadt und von Land zu Land unterschiedlich. Ein Fuß in Württemberg war 28,6 cm lang, in Bayern 29,2 mm und in Wien 31,6 cm.

Aufgabe 1: Geben Sie Längen, Flächen, Massen etc. aus Ihrem Alltag in ungewöhnlichen Einheiten an, z.B. Fläche des Tisches $= 45 \cdot$ Physikbuch.

2 SI-Einheiten

Um das Problem unterschiedlicher Einheiten zu lösen, hat man sich auf ein internationales Einheitensystem geeinigt, das **Système international d’unités** oder kurz **SI**. Durch das SI werden sieben **Basiseinheiten** zu physikalischen **Basisgrößen** festgelegt:

- Meter für die Länge
- Sekunde für die Zeit
- Kilogramm für die Masse
- Kelvin für die Temperatur
- Ampere für die elektrische Stromstärke
- Candela für die Lichtstärke

- Mol für die Stoffmenge

Alle anderen Einheiten werden daraus abgeleitet, z. B.

- $\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}$ für Geschwindigkeit
- Kilogramm $\cdot \frac{\frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}}{\text{Sekunde}}$ für Kraft

Bis hierhin ist alles ganz einfach. Aber die Physiker wollen es noch einfacher machen – und dadurch wird es wieder etwas komplizierter. Man versucht nämlich, die physikalischen Größen übersichtlich und kompakt zu schreiben:

- Man kürzt die Größen durch Buchstaben ab: Länge $\longrightarrow \ell$
- Man kürzt die Einheiten durch Buchstaben ab: Meter $\longrightarrow$ m
- Man schreibt die Zahlenwerte wissenschaftlich: 325 000 000 $\longrightarrow 3,25 \cdot 10^8$
- Man verwendet Vorsilben vor den Einheiten: 1 000 m $\longrightarrow$ km

Die Buchstaben für Größen und Einheiten sind im **Zusatzmaterial „Das ABC der Physik“** näher beschrieben. Die wissenschaftliche Zahlenschreibweise und die Vorsilben müssen wir uns etwas genauer anschauen.

Aufgabe 2: Lesen Sie das Zusatzmaterial „Das ABC der Physik“ und markieren Sie alle Größen und Einheiten, die Ihnen im Unterricht schon begegnet sind.

3 Wissenschaftliche Schreibweise

In der Physik sind Messwerte oft sehr klein oder sehr groß, z.B.

- Die Masse eines Elektrons: 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 91 kg
- Geschwindigkeit des Lichts: 299 792 458 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$
- Durchmesser des Weltalls: 880 000 000 000 000 000 000 000 000 m

Damit die Zahlenwerte übersichtlich bleiben, schreibt man sie mit Hilfe von Zehnerpotenzen mit genau einer Ziffer vor dem Komma

$$\boldsymbol{x,xxx \cdot 10^{yy}}$$

Für die Zahlenwerte der vorausgegangenen Beispiele bedeutet das (wir lassen die Einheiten kurz weg – keine Angst, sie kommen bald wieder dazu):

- 0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 91 $\longrightarrow$ Verschieben des Kommas um 31 Stellen nach rechts (Hochzahl wird negativ) zwischen die 9 und die 1 $\longrightarrow 9,1 \cdot 10^{-31}$
- 299 800 000 $\longrightarrow$ Verschieben des Kommas um 8 Stellen nach links (Hochzahl wird positiv) zwischen die 2 und die 9 $\longrightarrow 2,998 \cdot 10^8$
- 880 000 000 000 000 000 000 000 000 $\longrightarrow$ Verschieben des Kommas um 26 Stellen nach links (Hochzahl wird positiv) zwischen die 8 und die 8 $\longrightarrow 8,8 \cdot 10^{26}$

Aufgabe 3: Schreiben Sie folgende Zahlenwerte in wissenschaftlicher Schreibweise:

a) 123 456; 12 345,6; 1 234,56; 123,456; 12,23456; 1,23456; 0,123456; 0,0123456

b) 47 000; 0,001 234; 300 000; 0,000 03; 807 060; 0,000 000 001; 100 000 000

Ist eine Zahl in wissenschaftlicher Schreibweise gegeben, so muss man nur das Komma um so viele Stellen nach rechts verschieben, wie die Hochzahl angibt (bei negativer Hochzahl natürlich nach links):

- $12,34 \cdot 10^5 \longrightarrow 1\,234\,000$
- $12,34 \cdot 10^{-5} \longrightarrow 0,000\,123\,4$

Aufgabe 4: Schreiben Sie folgende Zahlenwerte ohne Zehnerpotenz:

a) $12,34 \cdot 10^2$; $12,34 \cdot 10^3$; $12,34 \cdot 10^{10}$; $12,34 \cdot 10^{20}$; $12,34 \cdot 10^{-10}$; $12,34 \cdot 10^{-20}$

b) $1,001 \cdot 10^5$; $132,75 \cdot 10^{-6}$; $7\,391 \cdot 10^{15}$; $0,56 \cdot 10^{-9}$; $0,001 \cdot 10^{-2}$; $0,001 \cdot 10^2$

Natürlich kann man Zahlen in wissenschaftlicher Notation auch multiplizieren, dividieren, addieren und subtrahieren:

$$\begin{aligned}
&(2,2 \cdot 10^9) \cdot (5,0 \cdot 10^{-4}) && \text{(Dezimalzahlen und Zehnerpotenzen sortieren)}\\
&(2,2 \cdot 5,0) \cdot (10^9 \cdot 10^{-4}) && \text{(Zehnerpotenzen zusammenfassen)}\\
&11 \cdot 10^{9+(-4)} && \text{(Hochzahlen addieren)}\\
&11 \cdot 10^5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(4,2 \cdot 10^9) : (2,0 \cdot 10^{-4}) && \text{(Dezimalzahlen und Zehnerpotenzen sortieren)}\\
&(4,2 : 2,0) \cdot (10^9 : 10^{-4}) && \text{(Zehnerpotenzen zusammenfassen)}\\
&2,1 \cdot 10^{9-(-4)} && \text{(Hochzahlen subtrahieren)}\\
&2,1 \cdot 10^{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&4710 + (3,4 \cdot 10^2) && \text{(in wiss. Schreibweise mit gleicher Hochzahl schreiben)}\\
&(47,1 \cdot 10^2) + (3,4 \cdot 10^2) && \text{(Zehnerpotenz ausklammern)}\\
&(47,1 + 3,4) \cdot 10^2 && \text{(Dezimalzahlen addieren)}\\
&50,5 \cdot 10^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&0,0742 - 0,0011 && \text{(in wiss. Schreibweise mit gleicher Hochzahl schreiben)}\\
&(7,42 \cdot 10^{-2}) - (0,11 \cdot 10^{-2}) && \text{(Zehnerpotenz ausklammern)}\\
&(7,42 - 0,11) \cdot 10^{-2} && \text{(Dezimalzahlen subtrahieren)}\\
&6,31 \cdot 10^{-2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5: Berechnen Sie mit Hilfe der wissenschaftlichen Schreibweise:

a) $4,4 \cdot 10^{18} \cdot 2,5 \cdot 10^{-4}$; $(4,4 \cdot 10^{18}) : (2,2 \cdot 10^{-4})$; $104 \cdot 0,035$; $0,004\,09 : 10,3$;

b) $4,4 \cdot 10^{18} + 2,5 \cdot 10^{18}$; $4,4 \cdot 10^9 - 2,2 \cdot 10^9$; $104 + 0,035$; $0,004\,09 - 10,3$;

4 Vorsilben der Größen

Oft sind die Zehnerpotenzen in den Vorsilben der Einheiten versteckt. Statt $1,3 \cdot 10^{-3}$ g (Gramm) schreibt man $1,3\,\mathrm{mg}$ (Milligramm). Im Alltag kennt man dies z.B. von Dezimeter, Milliliter und Kilowatt. Die üblichen Vorsilben, ihre Symbole und die zugehörigen Zehnerpotenzen lauten

Vorsilbe	*Symbol*	*Faktor*	*Vorsilbe*	*Symbol*	*Faktor*
Deka	da	10^{1}	Dezi	d	10^{-1}
Hekto	h	10^{2}	Centi	c	10^{-2}
Kilo	k	10^{3}	Milli	m	10^{-3}
Mega	M	10^{6}	Mikro	µ	10^{-6}
Giga	G	10^{9}	Nano	n	10^{-9}
Tera	T	10^{12}	Piko	p	10^{-12}
Peta	P	10^{15}	Femto	f	10^{-15}
Exa	E	10^{18}	Atto	d	10^{-18}

Wenn wir jetzt die SI-Einheiten, die wissenschaftliche Schreibweise und die Vorsilben kombinieren, erhalten wir die typische Schreibweise physikalischer Größen

$$\textbf{Physikalische Größe} = \boldsymbol{x,xxx \cdot 10^{yy}}\ \textbf{Einheit}$$

Liest man also in kompakter Schreibweise[1] z. B. $\ell = 12,34\,\mathrm{km}$ oder $m = 2,345\,\mathrm{µg}$, so muss man im Kopf folgende Ersetzungen denken:

$$\begin{aligned}
\ell &= 12,34\,\mathrm{km}\\
\ell &= 12,34 \cdot 10^{3}\,\mathrm{m}\\
\ell &= 12\,340\,\mathrm{m}\\
\text{Länge} &= 12\,340\,\text{Meter}\\
\text{Länge} &= 12\,340 \cdot 1\ \text{Meter}\\
\text{die Länge}\ &\text{ist}\ \ 12\,340\,\text{mal so lang wie ein Meter}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m &= 2,345\,\mathrm{µg}\\
m &= 2,345 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{g}\\
m &= 2,345 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{kg}\\
m &= 0,000000002345\,\mathrm{kg}\\
\text{Masse} &= 0,000000002345\,\text{Kilogramm}\\
\text{Masse} &= 0,000000002345 \cdot 1\ \text{Kilogramm}\\
\text{die Masse}\ &\text{ist}\ \ \text{der } 0,000000002345\text{te Teil eines Kilogramms}
\end{aligned}$$

[1] Größen werden bei Schreiben mit einer Textverarbeitung üblicherweise kursiv gesetzt, Einheiten und Vorsätze nicht kursiv

Trifft eine Zehnerpotenz auf eine Vorsilbe, so kann man sie zusammenfassen:

$$
\begin{aligned}
&3{,}4 \cdot 10^{7}\,\mathrm{nm} && \text{(Vorsilbe Nano meint } 10^{-9}\text{)}\\
&3{,}4 \cdot 10^{7} \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m} &&\\
&3{,}4 \cdot 10^{7+(-9)}\,\mathrm{m} && \text{(Hochzahlen addieren)}\\
&3{,}4 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} &&\\
&3{,}4\ \mathrm{cm} &&
\end{aligned}
$$

Wenn Einheiten quadriert werden, wirkt sich das auch auf die Vorsilbe aus:

$$
\begin{aligned}
&6{,}2\ \ \text{Quadratkilometer}\\
&6{,}2\ \ \mathrm{km}^2\\
&6{,}2\ \ \cdot (10^3 \cdot \mathrm{m})^2\\
&6{,}2\ \ \cdot (10^3)^2 \cdot \mathrm{m}^2\\
&6{,}2\ \ \cdot 10^{3\cdot 2} \cdot \mathrm{m}^2\\
&6{,}2\ \ \cdot 10^{6}\,\mathrm{m}^2
\end{aligned}
$$

Und nun noch eine Umrechnung, in der Einheiten in Brüchen vorkommen:

$$30\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}} = 30 \cdot \frac{10^3\,\mathrm{m}}{60\,\mathrm{s}} = 30 \cdot \frac{10^2\,\mathrm{m}}{6\,\mathrm{s}} = \frac{30}{6} \cdot 10^2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 5{,}0 \cdot 10^2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Das sollten Sie nun alles gut üben:

Aufgabe 6: Rechnen Sie folgende Zahlenangaben aus dem Alltag in SI-Einheiten in wissenschaftlicher Schreibweise um:

a) Der Burj Khalifa ist mit 828 m das höchste Bauwerk der Welt.

b) Der Laerdalstunnel (Norwegen) ist mit 24,5 km Länge der längste Straßentunnel der Welt.

c) Die größte Talsperre der Welt, gemessen am gestauten Wasservolumen, ist mit 180 Milliarden Kubikmetern die Kariba-Talsperre zwischen Simbabwe und Sambia.

d) Volumen einer Getränkeflasche: 1,5 Liter

e) Die größte Talsperre der Welt, gemessen an der Wasserfläche, ist mit 8500 Quadratkilometern der Volta-Stausee in Ghana.

f) Fläche eines DIN A4-Blattes mit den Maßen 21 cm und 29,7 cm

g) Größtes Passagierflugzeug ist der Airbus A380-800 mit maximaler Startmasse von 590 t.

h) Die Weltrekorde im Geschwindigkeitsskifahren liegen bei 251,400 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ für Männer und 242,590 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ für Frauen.

i) Die Fließgeschwindigkeit eines Gletschers beträgt ca. 20 m pro Tag.

j) Dauer einer Unterrichtsstunde: 45 min

k) Dauer der Sommerferien: 6 Wochen

5 Formeln umformen

Physikalische Formeln lassen sich genauso umformen und vereinfachen wie mathematische Terme auch; in physikalischen Formeln sind jedoch die Buchstaben vielfältiger. Statt

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

lautet eine analoge physikalische Formel

$$s = \frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0.$$

Und statt

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

steht im Physikbuch

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Wenn man eine Formel nach einer Größe auflösen muss, geht man genau so vor wie in Mathematik:

$$\begin{aligned} y &= \frac{a}{x} \\ y &= \frac{a}{x} \quad | \cdot x \\ y \cdot x &= a \quad | : y \\ x &= \frac{a}{y} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} I &= \frac{\Delta Q}{\Delta t} \\ I &= \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad | \cdot \Delta t \\ I \cdot \Delta t &= \Delta Q \quad | : I \\ \Delta t &= \frac{\Delta Q}{I} \end{aligned}$$

Ebenso kann man z. B. die Mitternachtsformel aus der Mathematik benutzen, um die Formel

$$s = \frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$$

für $s = 0$ nach t aufzulösen:

$$\begin{aligned} 0 &= a \cdot x^2 + b \cdot x + c \\ x_{1/2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 0 &= \frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0 \\ t_{1/2} &= \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4 \cdot \frac{g}{2} \cdot x_0}}{2 \cdot \frac{g}{2}} \\ &= \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot x_0}}{g} \end{aligned}$$

Aufgabe 7: Lösen Sie die folgenden Formeln nach der angegebenen Größe auf.

a) $F = m \cdot a$ nach a

b) $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ nach Δt

c) $\frac{m \cdot v^2}{r} = q \cdot v \cdot B$ nach r

d) $\frac{m \cdot v^2}{r} = q \cdot v \cdot B$ nach v

e) $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot g \cdot h$ nach v

f) $s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ nach t

g) $\frac{1}{2} \cdot D \cdot s^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot h$ nach m

h) $T_H^4 = a \cdot \frac{R_Z^2}{4 \cdot r^2} \cdot T_Z^4$ nach T_H

i) $T_H^4 = a \cdot \frac{R_Z^2}{4 \cdot r^2} \cdot T_Z^4$ nach T_Z

6 Formeln berechnen

Mit Hilfe der wissenschaftlichen Schreibweise und der SI-Einheiten lassen sich physikalische Formeln systematisch berechnen:

- gegebene Größen in wissenschaftlicher Schreibweise und mit SI-Einheiten schreiben;
- Formel aufschreiben;
- Formel nach der gesuchten Größe umformen und vereinfachen;
- gegebene Größen einsetzen;
- gesuchte Größe ausrechnen.

Übertragen wir diese Vorgehensweise auf folgende Aufgabe: „Wie lange braucht Schall (Geschwindigkeit in Luft: $1\,224\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$) für eine Strecke von $10\,\mathrm{cm}$?“

- gegebene Größen in wissenschaftlicher Schreibweise und mit SI-Einheiten schreiben:

$$v = 1\,224\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 1\,224 \cdot \frac{10^3\,\mathrm{m}}{3\,600\,\mathrm{s}} = 1\,224 \cdot \frac{1}{3,6} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 340\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 3,4 \cdot 10^2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\Delta s = 10\,\mathrm{cm} = 10 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} = 1 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{m}$$

- Formel aufschreiben:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

- Formel nach der gesuchten Größe umformen und vereinfachen:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v}$$

- gegebene Größen einsetzen:

$$\Delta t = \frac{1 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{m}}{3,4 \cdot 10^2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

- gesuchte Größe ausrechnen:

$$\begin{aligned}
\Delta t &= \frac{1 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{m}}{3,4 \cdot 10^{2}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \\
&= \frac{1}{3,4} \cdot \frac{10^{-1}}{10^{2}} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \\
&= \frac{1}{3,4} \cdot 10^{-1-2} \cdot \mathrm{m} \cdot \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}} \\
&= \frac{1}{3,4} \cdot 10^{-3} \cdot \mathrm{s} \\
&= \frac{1}{3,4}\,\mathrm{ms} \\
&\approx 0,3\,\mathrm{ms}
\end{aligned}$$

Aufgabe 8: Berechnen Sie die folgenden Formeln.

a) $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$; $\quad \Delta v = 12\,000\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$; $\quad \Delta t = 300\,\mathrm{Tage}$; $\quad a = ?$

b) $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$; $\quad \Delta s = 2500\,\mathrm{m}$; $\quad v = 30\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$; $\quad \Delta t = ?$

c) $\Delta s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2$; $\quad \Delta s = 3,5\,\mathrm{m}$; $\quad \Delta t = 5\,\mathrm{s}$; $\quad a = ?$

d) $E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$; $\quad m = 1\,500\,\mathrm{g}$; $\quad E = 10\,\mathrm{J}$; $\quad v = ?$

e) $h = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$ und $v = v_0 + g \cdot t$; $\quad h = 35\,\mathrm{m}$; $\quad v_0 = 9\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$; $\quad g = 9,8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$; $\quad v = ?$

f) $F = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2}$; $\quad \varepsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12}\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$; $\quad e = 1,6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$; $\quad r = 2 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$; $\quad F = ?$

7 Eine Muster-Rechenaufgabe – einmal ganz ausführlich

Aufgabe: Ein PKW fährt mit $90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Plötzlich erblickt die Fahrerin ein Hindernis. Nach einer *Schrecksekunde* macht sie eine Vollbremsung und kommt nach $100\,\text{m}$ zum Stehen. Diese $100\,\text{m}$ *Anhalteweg* beinhalten die Strecke, die in der Schrecksekunde zurückgelegt wird, und den eigentlichen *Bremsweg*.

a) Wie groß ist die Verzögerung (also die negative Beschleunigung) bei der Vollbremsung?

b) Wie lange dauert der gesamte, oben beschriebene Vorgang?

c) Angenommen, der Abstand zwischen PKW und Hindernis hätte zum Zeitpunkt des Erblickens nur $80\,\text{m}$ betragen. Mit welcher Geschwindigkeit wäre der PKW auf das Hindernis geprallt?

d) Wie groß hätte die Verzögerung des PKW mindestens sein müssen, um den Zusammenprall zu vermeiden?

e) Wie schnell hätte Fahrerin maximal fahren dürfen, um den Zusammenprall zu vermeiden? (Rechnen Sie mit der Verzögerung aus Teil a!)

Lösung a: Während der Schrecksekunde (Index s) zurückgelegter Weg:

$$\begin{aligned} v &= 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \Delta t_s &= 1\,\text{s} \\ \Delta s_s &= v \cdot \Delta t_s \\ &= 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1\,\text{s} = 25\,\text{m} \end{aligned}$$

Der Anhalteweg beträgt $100\,\text{m}$. Da $25\,\text{m}$ in der Schrecksekunde zurückgelegt wurden, bleiben noch $75\,\text{m}$ für den Bremsweg (Index b) übrig. Die Fahrerin muss also in $75\,\text{m}$ von $25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf $0\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ herunterbremsen. Gesucht ist dafür die Verzögerung a.

$$\begin{aligned} \Delta v &= -25\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \Delta s_b &= 75\,\text{m} \end{aligned}$$

Die Formel $\Delta s_b = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (\Delta t_b)^2$ nützt zunächst nichts, da Δt_b unbekannt ist. Also muss man zunächst die Bremszeit Δt_b bestimmen. Die beiden Formeln $\Delta s_b = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (\Delta t_b)^2$ und $\Delta v = a \cdot \Delta t_b$ zusammen helfen aber weiter: Löst man die zweite Formel nach a auf und setzt sie in die erste Formel ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \Delta s_b &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot (\Delta t_b)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\Delta v}{\Delta t_b}\right) \cdot (\Delta t_b)^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \Delta v \cdot \Delta t_b \end{aligned}$$

Dies kann man nach Δt_b auflösen:

$$\begin{aligned}\Delta t_b &= 2 \cdot \frac{\Delta s_b}{\Delta v} \\ &= 2 \cdot \frac{75\,\mathrm{m}}{25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \\ &= 6\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

Die Bremszeit beträgt also 6 s. Nun lässt sich die Verzögerung berechnen:

$$\begin{aligned}a &= \frac{\Delta v}{\Delta t_b} \\ &= \frac{-25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{6\,\mathrm{s}} \\ &\approx -4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\end{aligned}$$

Die Verzögerung des PKW beträgt also ca. $-4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Lösung b: Die Gesamtzeit ist die Summe aus Schrecksekunde und Bremszeit:

$$\begin{aligned}\Delta t_{\text{gesamt}} &= \Delta t_s + \Delta t_b \\ &= 1\,\mathrm{s} + 6\,\mathrm{s} \\ &= 7\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

Der gesamte Vorgang dauert 7 s.

Lösung c: Eigentlich braucht die Fahrerin 100 m, um zum Stillstand zu kommen. Sie hat jetzt aber nur 80 m Platz. Gesucht ist also die Geschwindigkeit, die sie 20 m vor dem Stillstand noch hat. Man kann sich die Arbeit erleichtern, indem man umgekehrt denkt: Welche Geschwindigkeit hat ein PKW nach 20 m, der aus der Ruhe heraus mit $+4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ beschleunigt. Dazu braucht man erst wieder die Zeit:

$$\begin{aligned}\Delta s &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot (\Delta t)^2 \\ (\Delta t)^2 &= \frac{2 \cdot \Delta s}{a} \\ \Delta t &= \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta s}{a}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 20\,\mathrm{m}}{4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{4}} \cdot \sqrt{\frac{\mathrm{m}}{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} \\ &\approx 3,16 \cdot \sqrt{\frac{\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^2}{\mathrm{m}}} \\ &= 3,16 \cdot \sqrt{\mathrm{s}^2} \\ &= 3,16\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

Nun muss die Geschwindigkeit nach 3,16 s berechnet werden:

$$\begin{aligned}\Delta v &= a \cdot \Delta t \\ &= 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 3,16\,\mathrm{s} \\ &\approx 12,6\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ &\approx 45\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\end{aligned}$$

Der PKW fährt mit einer Geschwindigkeit von 45 $\frac{\mathbf{km}}{\mathbf{h}}$ auf das Hindernis auf!

Lösung d: Man verwendet dieselbe Vorgehensweise wie in Aufgabenteil a – allerdings mit einem kürzeren Bremsweg: 80 m (Abstand zum Hindernis) minus 25 m (Weg in der Schrecksekunde). Die Fahrerin muss also in 55 m von 25 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ auf 0 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ herunterbremsen. Gesucht ist dafür die Verzögerung a.

$$\begin{aligned}\Delta v &= -25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ \Delta s &= 55\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

Berechnung der Bremszeit Δt (Herleitung der Formel wie in Aufgabenteil a):

$$\begin{aligned}\Delta t &= 2 \cdot \frac{\Delta s}{\Delta v} \\ &= 2 \cdot \frac{55\,\mathrm{m}}{25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} \\ &= 4,4\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

Nun lässt sich die Verzögerung berechnen:

$$\begin{aligned}a &= \frac{\Delta v}{\Delta t} \\ &= \frac{-25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{4,4\,\mathrm{s}} \\ &\approx -5,7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\end{aligned}$$

Die Verzögerung des PKW hätte also $-5,7\,\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s}^2}$ betragen müssen, um den Zusammenprall zu verhindern.

Lösung e: Der Anhalteweg setzt sich aus Weg Δs_s in der Schrecksekunde und Bremsweg Δs_b zusammen:

$$\begin{aligned}\Delta s_{\text{gesamt}} &= \Delta s_s + \Delta s_b \\ &= v \cdot \Delta t_s + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (\Delta t_b)^2\end{aligned}$$

Die Bremszeit Δt_b ergibt sich wieder aus der Gleichung $v = a \cdot \Delta t_b$, die man nach Δt_b auflöst. Setzt man dies ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}\Delta s_{\text{gesamt}} &= v \cdot \Delta t_s + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{v}{a}\right)^2 \\ &= v \cdot \Delta t_s + \frac{v^2}{2a}.\end{aligned}$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für v, was man leicht erkennen kann, wenn man die Summanden umsortiert:

$$\frac{1}{2a} \cdot v^2 + \Delta t_s \cdot v - \Delta s_{\text{gesamt}} = 0 \tag{1}$$

Die Gleichung kann man mit der Mitternachtsformel lösen:

$$\begin{aligned}v_{1,2} &= \frac{-\Delta t_s \pm \sqrt{(\Delta t_s)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2a} \cdot (-\Delta s_{\text{gesamt}})}}{2 \cdot \frac{1}{2a}} \\ &= a \cdot \left(-\Delta t_s \pm \sqrt{(\Delta t_s)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2a} \cdot (-\Delta s_{\text{gesamt}})}\right) \\ &= a \cdot \left(-\Delta t_s \pm \sqrt{(\Delta t_s)^2 + \frac{2 \cdot \Delta s_{\text{gesamt}}}{a}}\right) \\ &= 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \left(-1\,\mathrm{s} \pm \sqrt{(1\,\mathrm{s})^2 + \frac{2 \cdot 80\,\mathrm{m}}{4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}\right) \\ &\approx 4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (-1\,\mathrm{s} \pm 6,3\,\mathrm{s}) \\ v_1 &= 21,2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 76\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \\ v_2 &= -29,2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx -105\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\end{aligned}$$

Nur die Lösung v_1 ist physikalisch sinnvoll.

Die Fahrerin hätte also maximal mit einer Geschwindigkeit von 76 $\frac{\mathbf{km}}{\mathbf{h}}$ fahren dürfen.

Aufgabe 9: Versuchen Sie, die Musteraufgabe selbst zu rechnen!