

Unterricht mit dem Stickstoff-Laser

Ein Unterrichtsgang von der Anwendung zur Theorie des Lasers

F. Karsten

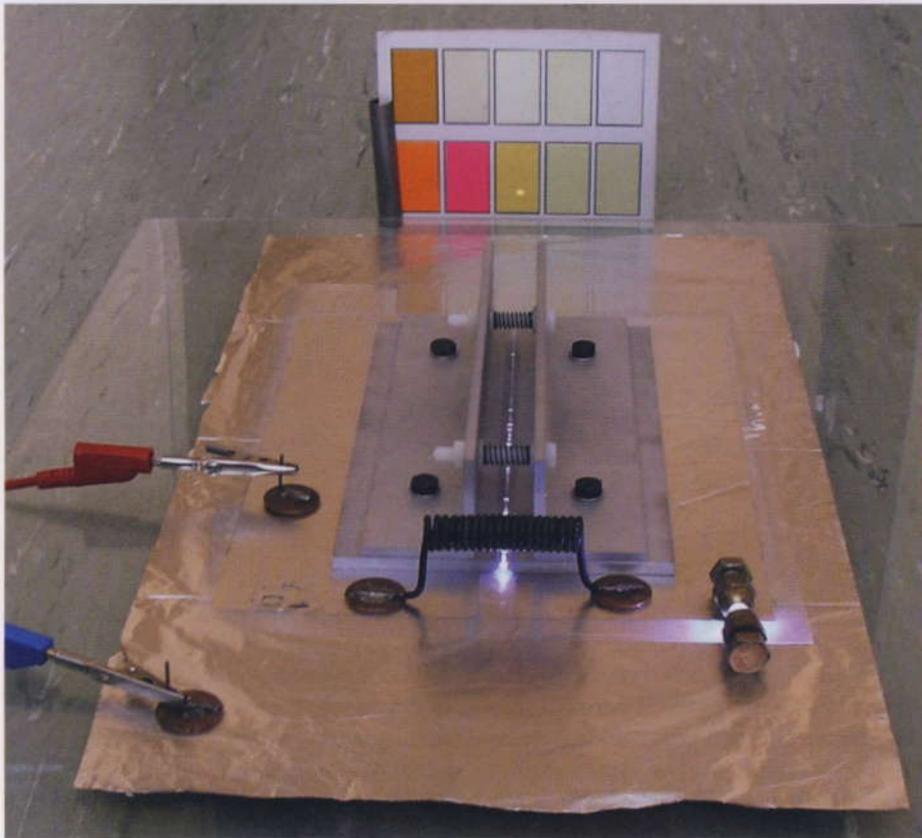


Abb. 1: Der Stickstoff-Laser in Betrieb

Lasers schneiden Metall, weisen die Richtung beim Tunnelbau und vermessen das Ozonloch. Ohne Laser gäbe es kein Hologramm, keinen Laserdrucker und keine CD! Aber so interessant die Anwendungen des Lasers in verschiedenen Bereichen unserer technisierten Welt auch sein mögen – das eigentlich Faszinierende ist das geniale physikalische Prinzip, das hinter jedem Laser steckt.

Dennoch führen viele Lehrpläne den Laser gar nicht mehr oder nur noch als Wahlthema auf. Auch die Schulbücher besprechen den Laser meist erst am Ende ihrer Kapitel über Atom- und Quantenphysik – also am Ende der Sekundarstufe II. Der Grund dafür ist, dass der Standard-Laser, der Helium-Neon-Laser, in der Schule nur schwer zu erklären ist, da man zu seiner Beschreibung unter anderem vier Energieniveaus, metastabile Niveaus, Gasröhren, Stoßprozesse, stehende Wellen, und halbdurchlässige Spiegel behandeln muss. Es ist praktisch unmöglich, den Helium-Neon-Laser zu verstehen, ohne zuvor eini-

ges über Atom- und Quantenphysik gelernt zu haben. Dabei muss allerdings viel trockenes Vorratswissen angehäuft werden – ein nicht sehr motivierendes Verfahren. Für alle Schülerinnen und Schüler, die Physik nicht bis zum Abitur belegen, bleibt der Laser dadurch nur eine besondere Lichtquelle, die einfarbig und gebündelt ist. Das geniale Prinzip des Lasers bleibt ihnen verborgen.

Dieses Problem löst ein besonderer Laser, den man ohne großen Aufwand selbst bauen kann: der Stickstoff-Laser (siehe Abb. 1 sowie [1] und [4]). Er ist übersichtlich aufgebaut und benutzt den Stickstoff der Umgebungsluft. Außerdem fasziniert er durch die Einfachheit der verwendeten Bauteile wie Münzen, Schrauben und Alufolie. Er benötigt zur Erklärung nur zwei Energieniveaus und kommt ohne Spiegel und Gasröhren aus. Die Schülerinnen und Schüler können seine Funktionsweise auch verstehen, ohne vorher Atom- und Quantenphysik gelernt zu haben. Dadurch ist es möglich, die grundlegenden Prinzi-

pien des Lasers sogar schon in der Sekundarstufe I zu behandeln.

Im vorliegenden Beitrag werden Unterrichtsbausteine zum Stickstoff-Laser für die Sekundarstufe I und II vorgestellt. Der Unterricht beginnt beim Gerät, dem Laser, und sucht sich Schritt für Schritt die Theorie, die zur Erklärung nötig ist.

1. Der Stickstoff-Laser

Der Stickstoff-Laser ist ein Molekülgas-Laser, der im Pulsbetrieb ultraviolettes Laserlicht mit $\lambda = 337,1 \text{ nm}$ und einer Leistung von ca. $0,1 \text{ mW}$ erzeugt¹. Dieser Laser wird sowohl an der Universität als auch an manchen Schulen als Demonstrationslaser eingesetzt. In [2] wird ein bereits zusammengebautes Gerät beschrieben, das aber heute nicht mehr im Handel erhältlich ist. Auch im Internet finden sich unzählige Seiten, die sich mit mehr oder weniger komplizierten Versionen des Stickstoff-Lasers beschäftigen.

Der von mir gebaute Laser geht im wesentlichen auf [3] zurück. Allerdings ist es sehr aufwendig, die beiden Laserplatten, die den Kern des Aufbaus bilden, genau zu justieren. Kleinste Stöße können die Platten so verschieben, dass kein Laserlicht mehr entsteht. Daher wurde der Aufbau durch Winkel und Schrauben und Federn so verbessert, dass er – einmal justiert – schnell aufzubauen ist und zuverlässig funktioniert².

Ziel des Aufbaus ist, eine Serie von Überschlügen entlang des gesamten Laserkanals zu erzeugen, die den Stickstoff im Laserkanal anregen und die für den Laservorgang notwendige Besetzungsinversion herstellen. Würde man die beiden Laserplatten direkt an ein Netzgerät anschließen, gäbe es nur an der engsten Stelle des Laserkanals einen Überschlag. Um aber Überschlüge an vielen Stellen zu erzeugen, muss man dafür sorgen, dass am Laserkanal vor dem Überschlag eine Spannung an-

¹ Das UV-Licht gehört zum Bereich UV-A. Der Laser selbst gehört zur Laserklasse 1M. Die Strahlung ist für das Auge ungefährlich, solange der Strahlquerschnitt nicht durch optische Instrumente verkleinert wird.

² Eine Aufbauanleitung mit Materialliste findet man unter www.floriankarsten.de/laser.html

liegt, die viel höher ist als die eigentliche Zündspannung. Dies erreicht man durch die Kondensatorplatten, die Spule und die Funkenstrecke: Da die beiden Laserplatten durch die Spule verbunden sind, laden sich die beiden oberen Platten gleichmäßig auf. Wenn die Spannung groß genug ist, entsteht an der Funkenstrecke ein Überschlag. Dabei entlädt sich eine der beiden Laserplatten sehr schnell, und die Spule wirkt wie ein sehr großer Widerstand. Die zweite Laserplatte bleibt daher geladen. Die Potentialdifferenz, die zuvor an der Funkenstrecke lag, liegt nun zwischen den beiden Laserplatten. Da der Abstand der Laserplatten geringer ist als die Länge der Funkenstrecke, liegt am Laserkanal nun eine Spannung, die viel größer ist als die eigentlich nötige Zündspannung. Durch die Kondensatoranordnung steht außerdem eine große Ladung zum Überschlag zur Verfügung. Beides sorgt dafür, dass sich eine Vielzahl von Überschlägen entlang des gesamten Kanals ausbilden.

Eine ausführlichere Beschreibung der experimentellen und theoretischen Grundlagen dieses Stickstoff-Lasers findet man in [1] und [4].

2. Der Unterrichtsgang

Unter Verwendung des Stickstoff-Lasers kann man im Unterricht folgenden Weg von der Anwendung zur Theorie gehen:

- Welche Eigenschaften hat Laserlicht?
- Ist der Stickstoff-Laser wirklich ein Laser?
- Wie funktioniert der Stickstoff-Laser ‚elektrisch‘?
- Wie entsteht das Laserlicht?
- Wird Licht von Atomen tatsächlich absorbiert und emittiert?
- Warum ist die Energie in Atomen gequantelt?

M. Wagenschein beschreibt dieses Vorgehen so: „Wir steigen also beim ‚Einstieg‘ von dem Problem aus hinab ins Elementare, wir suchen das, wonach es zu seiner Erklärung verlangt. Eine Auswahl ist damit gegeben: Wir häufen nicht mehr auf Vorrat, sondern suchen, was wir brauchen, wir verfahren also wie in der ursprünglichen Forschung. Das Seltsame fordert uns heraus, und wir fordern ihm das Einfache ab.“ [5, S. 35]

Anschließend kann man den Weg rückwärts gehen und mithilfe des erarbeiteten Wissens die Frage beantworten: Wie funktioniert der Helium-Neon-Laser?

Die Schülerinnen und Schüler wissen bei der Erarbeitung eines neuen Unterrichtsgegenstandes stets, warum er behandelt wird und wofür er hilfreich ist. Sie er-

Baustein	Sekundarstufe II	Sekundarstufe I
Baustein 1:	Welche Eigenschaften hat Laserlicht? (S) Laserlicht eines Laserpointers wird untersucht (S)	✓
Baustein 2:	Was ist der Stickstoff-Laser? (L) Ist es wirklich ein Laser? (S/L)	✓
Baustein 3:	Wie funktioniert der Stickstoff-Laser elektrisch? (S)	✗
Baustein 4:	Wie entsteht das Laserlicht? (S)	✓
Baustein 5:	Wird Licht von Atomen tatsächlich absorbiert und emittiert? (S/L)	✗
Baustein 6:	Warum ist die Energie in Atomen gequantelt? (S)	✗
Baustein 7:	Wie funktioniert der He-Ne-Laser? (L)	✗

Tab. 1: Übersicht über die Bausteine des Unterrichts

leben so einen motivierenden, nachhaltigen Physikunterricht.

Tabelle 1 stellt den Unterrichtsgang für die Sekundarstufe II dar, der im folgenden beschrieben wird. Außerdem sind die Bausteine gekennzeichnet, die auch für die Sekundarstufe I geeignet sind. Die Angabe (L) bedeutet, dass der Unterricht in dieser Phase eher lehrerzentriert ablaufen muss. Die Angabe (S) bedeutet, dass der Unterricht in dieser Phase eher schülerzentriert ablaufen kann.

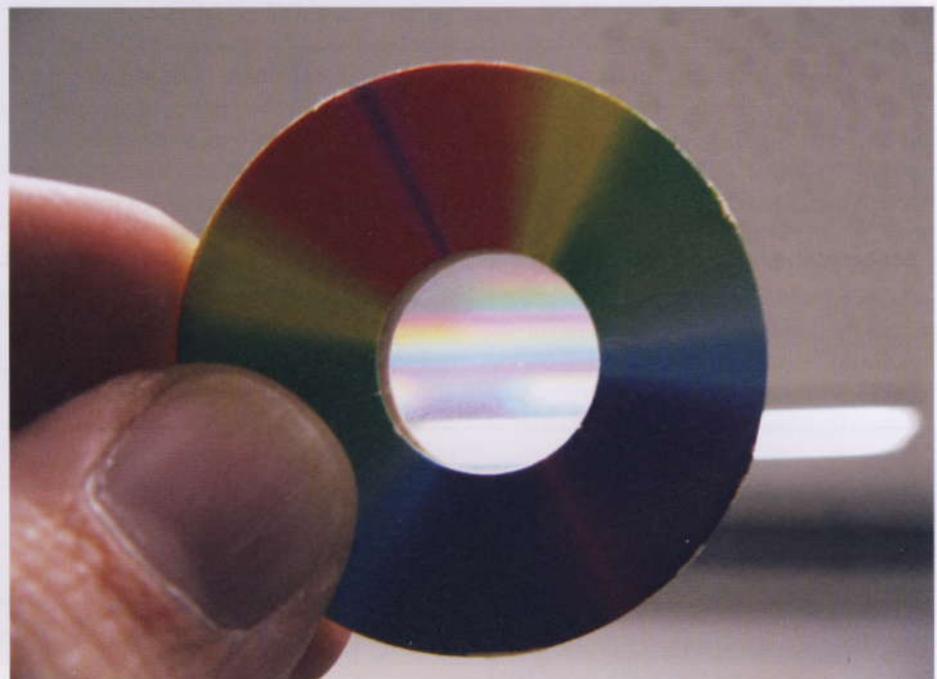
Baustein 1: Eigenschaften des Laserlichtes

Im ersten Baustein sollen die Schülerinnen und Schüler im Rahmen einer Teamarbeit das Licht eines Laserpointers mit dem einer gewöhnlichen Lichtquelle vergleichen und daraus die Eigenschaften des Laserlichtes ableiten. Drei dieser Eigenschaften

(einfarbig, gebündelt, intensiv) sind aus dem Alltag oder dem Physikunterricht bekannt. Sie brauchen also nicht näher erklärt zu werden. Nur die Kohärenz ist ein für Schüler unbekannter und für Schulbücher schwer zu erklärender Begriff. Für das weitere Vorgehen genügt es, wenn die Schülerinnen und Schüler mit kohärent „im Gleichtakt laufende Wellen“ bzw. „die Fähigkeit, Interferenzmuster erzeugen zu können“ assoziieren.

Jedes Team bekommt eine vorbereitete Kiste mit Arbeitsaufträgen (vgl. Arbeitsblatt 1) und dem benötigten Material. In allen Kisten befinden sich Prismen, Linsen, Spalte und Gitter. Als Gitter bietet sich ein günstiges Kreuzgitter an, das in Spielzeugläden unter der Bezeichnung „Rainbow Peephole“ zu kaufen ist (vgl. Abb. 2). Außerdem erhält jedes Team eine der fol-

Abb. 2: Kreuzgitter „Rainbow Peephole“



Eigenschaften des Laserlichtes

Arbeitsblatt 1

Wir vergleichen das Licht eines Laserpointers mit dem Licht einer „normalen“ Lichtquelle!

Material:

- Laserpointer
- Prismen
- Gitter
- Linsen
- Spalte
- „Normale“ Lichtquellen:
 - Glühbirne
 - Taschenlampe
 - Kerze
 - Natrium-Dampf Lampe



Sicherheitshinweis: Schau niemals direkt in einen Laserpointer oder in einen Laserstrahl! Betrachte nur den Laserfleck an der Wand oder auf einem Schirm! Richte den Laserstrahl niemals absichtlich auf Personen!

1. Welches Experiment haben wir durchgeführt?

Beobachtung beim normalen Licht:

Beobachtung beim Laserlicht:

2. Welches Experiment haben wir durchgeführt?

Beobachtung beim normalen Licht:

Beobachtung beim Laserlicht:

genden „gewöhnlichen“ Lichtquellen: Glühbirne, Taschenlampe, Kerze und Natrium-Dampflampe.

Die Teams sollen sich selbst Experimente ausdenken, um die ihnen zur Verfügung stehende gewöhnliche Lichtquelle mit dem Laserpointer vergleichen zu können. Die Experimente und Beobachtungen können auf dem Arbeitsblatt notiert werden.

Die Schülerinnen und Schüler erkennen meist rasch, dass Laserlicht monochromatisch ist. Die Experimente dazu sind jedoch unterschiedlich: Gitter, Prismen aber auch eine Kombination aus beidem werden verwendet. Dass Laser ein sehr gebündeltes Licht erzeugen, ist den Schülerinnen und Schülern so selbstverständlich (Laser kennen sie ja meist von Laserpointern, Lasershows und Science-Fiction-Filmen), dass sie gar keine Experimente dazu machen. Man muss sie daher auffordern, ihre gewöhnliche Lichtquelle mithilfe der Linsen so zu bündeln, dass ein ähnlich kleiner Punkt an der Zimmerwand zustande kommt. Eine Schülerin bezeichnete dabei das Taschenlampenlicht als „Lichtwolke“ im Gegensatz zum „Lichtpunkt“ des Lasers.

Auch zur Interferenz werden Experimente durchgeführt, die meist damit enden, dass der Laserpointer das eben besonders gut kann. Die Intensität als vierte, wichtige Lasereigenschaft kann im Rahmen dieser Experimente nicht entdeckt werden.

Anschließend berichten die Teams über ihre Experimente sowie die daraus abgeleiteten Eigenschaften. Die Lehrkraft ergänzt die von den Teams entdeckten Eigenschaften. Als Hausaufgabe soll die Frage beantwortet werden: „Wo werden Laser verwendet, und welche Lasereigenschaften spielen dabei eine Rolle?“

Baustein 2: Der Stickstoff-Laser

Im zweiten Baustein werden der Stickstoff-Laser vorgeführt und seine Lasereigenschaften nachgewiesen.

Der Baustein beginnt mit der Wiederholung der Eigenschaften des Laserlichtes. Die Schüler sollten als Hausaufgabe Anwendungen des Lasers und die für diese Anwendung entscheidenden Eigenschaften herausfinden, z.B.

- Richtungsweiser beim Tunnelbau (gebündelt)
- Schweißen und Schneiden (gebündelt, intensiv)
- CD- und DVD-Player sowie CD- und DVD-Brenner (gebündelt, einfarbig, kohärent)

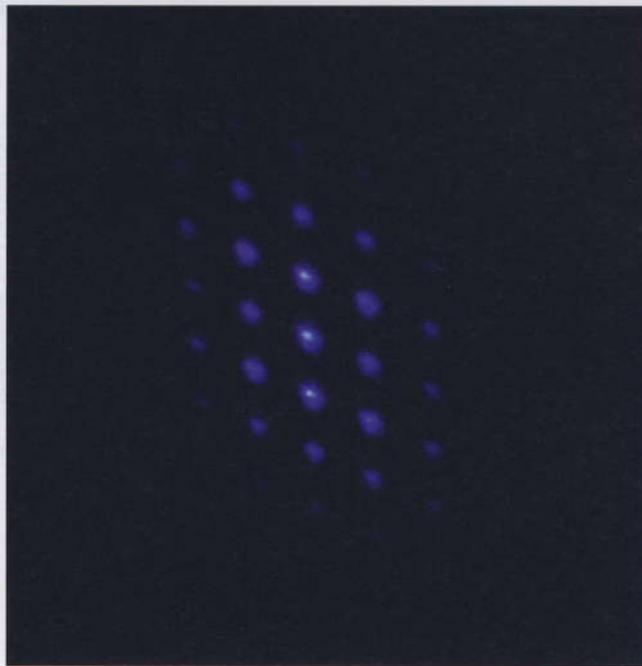


Abb. 3: Interferenzmuster des Kreuzgitters

Im nächsten Schritt wird der Stickstoff-Laser gezeigt und erklärt, aus welchen Teilen er besteht (vgl. Arbeitsblatt 2). Die im Lösungsvorschlag genannten Begriffe hängen selbstverständlich stark vom Vorwissen der Schülerinnen und Schüler sowie von der Klassenstufe ab und sollten dementsprechend angepasst werden. Über die Funktionsweise wird an dieser Stelle noch nicht gesprochen, da die Teams diese später selbst herausfinden sollen.

Der Laser wird eingeschaltet; ein grauer, ungebleichter Karton wird in den Laserstrahl gehalten. Die Schülerinnen und Schüler reagieren meist enttäuscht, dass es zwar knallt, aber kein Laserstrahl zu sehen ist. Nun kann erklärt werden, dass dieser Laser UV-Licht emittiert und wie man es sichtbar machen kann. Hält man weißes, gebleichtes Papier in den Strahl, erscheint bei jedem Knall ein blauer Punkt.

„Woher wissen wir, dass es sich hierbei tatsächlich um Laserlicht handelt?“ – diese Frage soll die Schülerinnen und Schüler an die im ersten Baustein durchgeführten Experimente erinnern. Mithilfe des Spielzeug-Kreuzgitters kann die Einfarbigkeit und Kohärenz gezeigt werden (siehe Abb. 3).

Die Bündelung des Laserlichts kann man zeigen, indem man einen blauen Punkt an der mehrere Meter entfernten Zimmerwand erzeugt. Dieser ist zwar aufbaubedingt nicht so winzig wie der eines Laserpointers, aber immer noch viel kleiner als es mit einer Taschenlampe möglich wäre.

Nun kann das Ziel der gesamten Unterrichtseinheit formuliert werden: „Wir wollen verstehen, wie dieser Laser funktioniert.“

Baustein 3: Wie funktioniert der Stickstoff-Laser elektrisch?

So einfach der Stickstoff-Laser auf den ersten Blick auch aussieht, so kompliziert ist es, seine elektrische Funktionsweise genau zu verstehen. Daher ist es unabdingbar, dass die Schülerinnen und Schüler selbst über das Gerät diskutieren und es sich Schritt für Schritt gegenseitig erklären. Genauso wichtig ist aber auch ein Überblick über den gesamten elektrischen Prozess. Beide Aspekte spielen in diesem Baustein daher eine zentrale Rolle.

Zunächst werden in einem Arbeitsblatt mit einer Schräg- und einer Seitenansicht des Lasers die Bezeichnungen der einzelnen Bauteile eingetragen.

Anschließend sollen die Schülerinnen und Schüler in Teams sich die elektrische Funktionsweise des Stickstoff-Lasers (vgl. [1], [4]) erarbeiten. Der Aufladevorgang wie der erste Funkenüberschlag ist dabei schnell zu verstehen. Etwas mehr Probleme bereitet der zweite und die Funktion der Spule. Da jeder einzelne Schritt viel Denk- und Diskussionszeit verlangt, kann die Lehrkraft als Zusammenfassung den elektrischen Ablauf des Lasers in einer PowerPoint-Präsentation³ animieren. Als anspruchsvolle Hausaufgabe soll überlegt werden, warum der Stickstoff-Laser zwei elektrische Überschlüge benötigt?

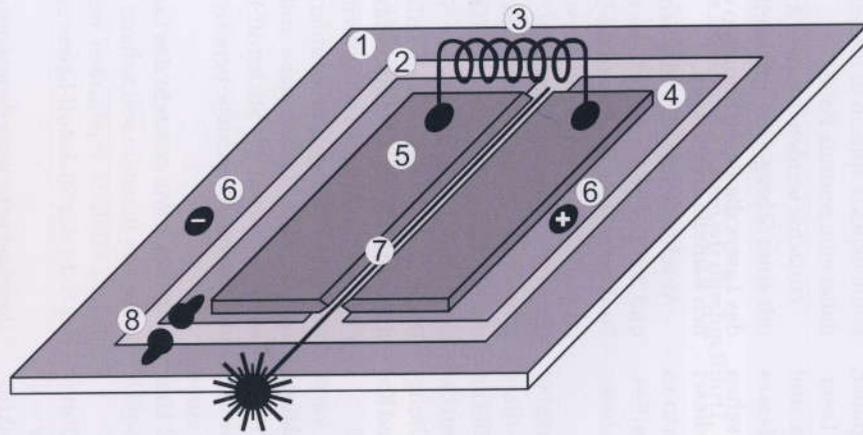
Baustein 4: Wie entsteht das Laserlicht?

In diesem Baustein soll anhand eines einfachen Modells verstanden werden, wie das Licht des Stickstoff-Lasers entsteht.

³ Download unter www.floriankarsten.de/laser.html

Der Stickstoff-Laser

Arbeitsblatt 2



①

②

③

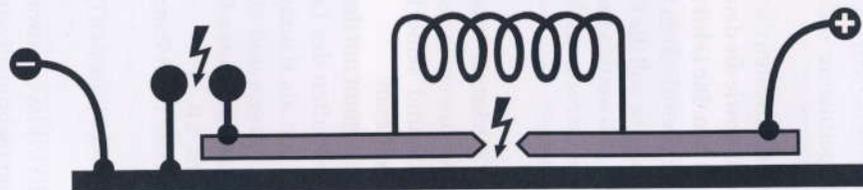
④

⑤

⑥

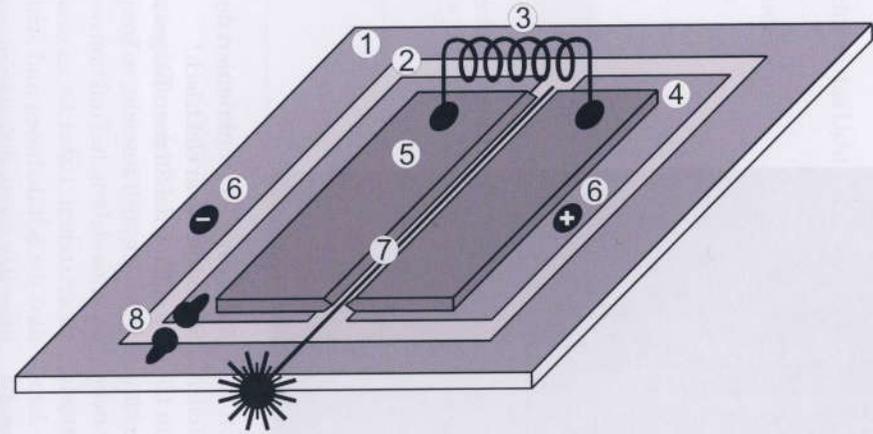
⑦

⑧



Der Stickstoff-Laser (Lösungen)

Arbeitsblatt 2



① Alufolie auf Kunststoffplatte

② Kopierfolie (Isolator)

③ Spule

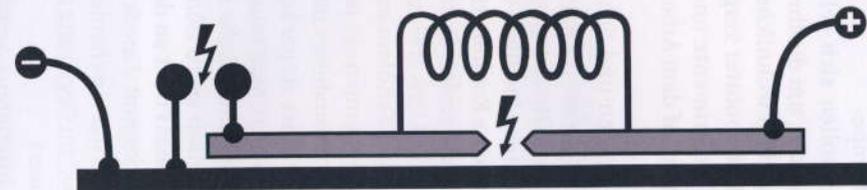
④ Alufolien

⑤ Laserplatten
(Aluplatten mit Schneiden)

⑥ Hochspannung (6000 V)

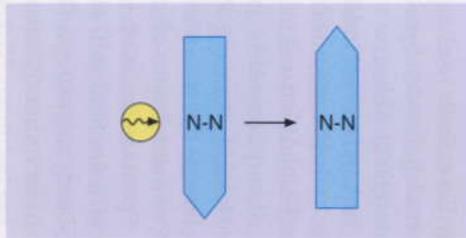
⑦ Laserkanal

⑧ Funkenstrecke (Schrauben)

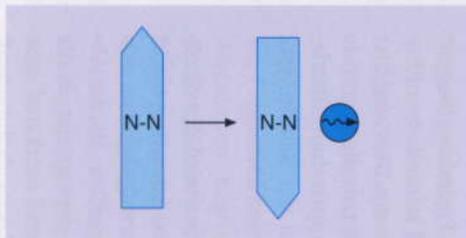


Unsere Luft besteht zu 77,1 % aus Stickstoff (N₂ oder N-N). Daher befinden sich im Laserkanal fast nur Stickstoff-Moleküle. Die Stickstoff-Moleküle besitzen viele Energieniveaus. Nur zwei davon sind für unseren Laser wichtig. Wir nennen sie unteres und oberes Energieniveau. Die Stickstoff-Moleküle können mit Licht auf drei Arten wechselwirken:

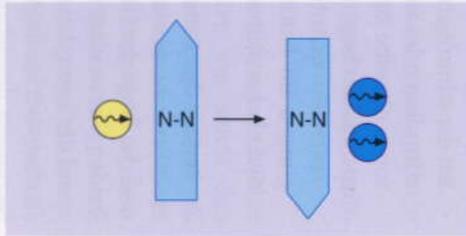
1) **Absorption:** Das Stickstoff-Molekül kann ein Photon (Lichtteilchen) passender Energie E absorbieren und springt dabei vom unteren ins obere Energieniveau.



2) **Spontane Emission:** Befindet sich das Stickstoff-Molekül im oberen Energieniveau, so fällt es spontan (d. h., nach einer Zeit, die nicht vorhersagbar ist) ins untere Niveau zurück. Dabei sendet es ein Photon aus. Dieses Photon besitzt dieselbe Energie E wie das in 1) absorbierte.



3) **Stimulierte Emission (Albert Einstein 1917):** Trifft ein Photon ein Stickstoff-Molekül, das sich im oberen Energieniveau befindet, so kann es eine vorzeitige Emission stimulieren: Das Stickstoff-Molekül fällt sofort wieder ins untere Niveau zurück und sendet ein Photon aus. Das stimulierende und das entstandene Photon haben dieselbe Energie E und laufen beide im Gleichschritt (→ Kohärenz).



Aufgaben und Fragen

- 1) Simuliert mit Hilfe des Modells mögliche Abläufe im Laserkanal bei verschiedenen Anfangsverteilungen (unten/oben) von Stickstoff-Molekülen (Auswertung auf Seite 2)!
- 2) Wie müsste die Anfangsverteilung beschaffen sein, um eine möglichst große Ausbeute an Photonen (im Gleichtakt) zu bekommen?
- 3) In der Realität befinden sich bei Zimmertemperatur fast alle Moleküle im unteren Niveau. Bei ca. 5 000 000 °C sind immer noch doppelt so viele im unteren wie im oberen Niveau. Auch bei unendlich hoher Temperatur wäre höchstens eine Gleichverteilung zu erreichen. Was bedeutet das für Eure Lösung von Aufgabe 2?
- 4) Es gibt noch eine weitere Möglichkeit, die Stickstoff-Moleküle in das obere Niveau zu heben: Wenn Elektronen mit den Stickstoff-Molekülen zusammenstoßen! Wie kann man diesen Effekt für den Laser ausnutzen?

Zu Aufgabe 1:

Anfangsverteilung	Endverteilung	Photonenausbeute

Zu Aufgabe 2:

Zu Aufgabe 3:

Zu Aufgabe 1:

Anfangsverteilung	Endverteilung	Photonenausbeute
0 ↓ ↓ ↑ ↑ ↓ ↓ ↓ ↓	↑ ↓ ↑ ↑ ↓ ↓ ↓ ↓	0 (-1)
⊖ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓	↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ↓ ↑ ⊗	1
⊖ ↑ ↑ ↑ ↑ ↓ ↓ ↓ ↓	↓ ↓ ↓ ↓ ↑ ↑ ↑ ↑ ⊖	0
⊖ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑	↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ⊗ ⊗ ⊗	8

- Zu Aufgabe 2: Unsere Lösung von Aufgabe 2 ist nicht möglich, da maximal die Hälfte „oben“ sein kann.
- Zu Aufgabe 3: Wenn viele Elektronen mit den Stickstoff-Molekülen zusammenstoßen, können mehr als die Hälfte „oben“ sein. Idee: Überschlag!

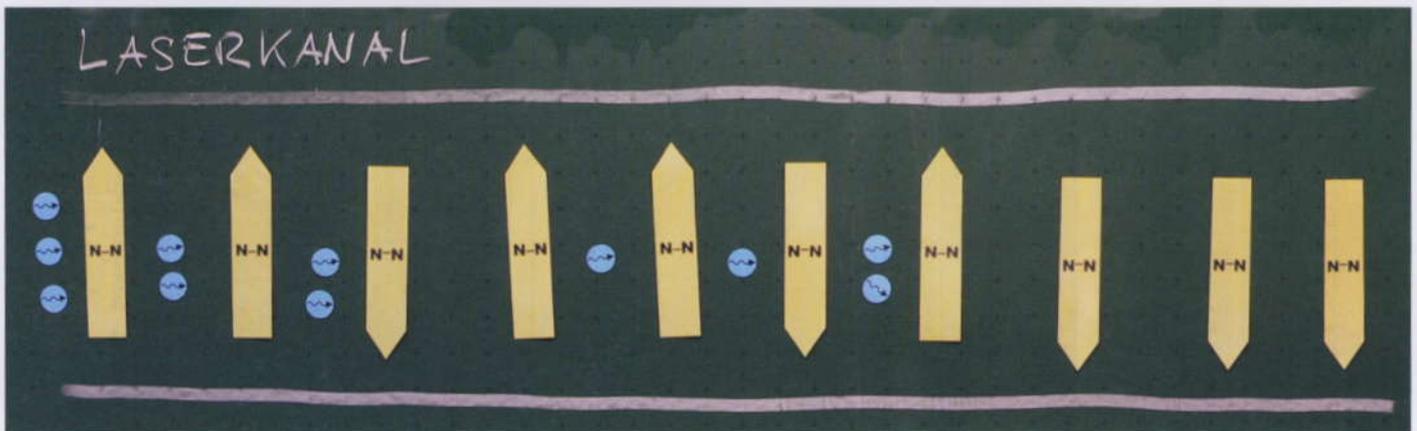


Abb. 4: Pfeilmodell für die Lichtentstehung

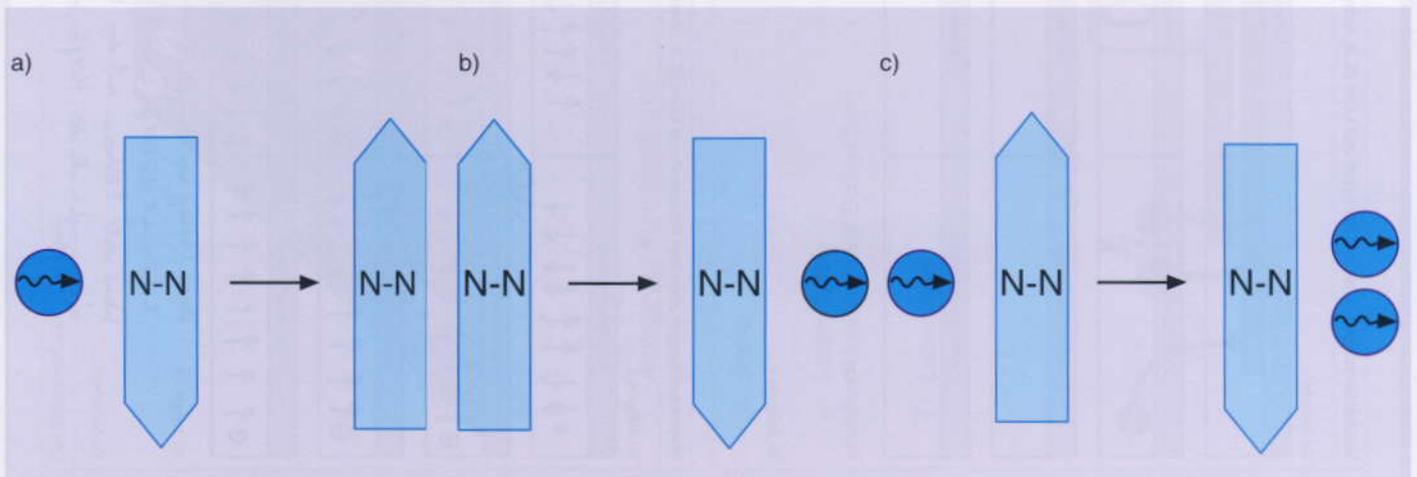


Abb. 5: Absorption (a), spontane Emission (b) und stimulierte Emission (c) im Pfeilmodell

Die Entstehung des Laserlichtes physikalisch korrekt zu erklären, ist aufwendig und schwierig. Für den Schulunterricht bietet sich ein einfaches Modell an, mit dessen Hilfe die Schülerinnen und Schüler Absorption, spontane bzw. stimulierte Emission, Besetzungsinversion und Lichtverstärkung verstehen können. Dieses Modell für den Stickstoff-Laser ist [6] entnommen und besteht aus magnetisch haftenden Photonen- und Stickstoff-Symbolen (siehe Abb. 4). Letztere sind Pfeile, die den Anregungszustand des Stickstoff-Moleküls anzeigen. Mit Hilfe der Symbole lassen sich die Absorptions- und Emissionsprozesse in Momentaufnahmen darstellen. Die Ausbreitung und Verstärkung der Lichtwellen kann damit von den Schülerinnen und Schülern leicht nachvollzogen werden.

Dieses Modell setzt einige Annahmen voraus, die in den nachfolgenden Bausteinen begründet werden:

- Atome senden Photonen aus und nehmen Photonen auf. Dies wird in Baustein 4 begründet.
- Existenz diskreter Energieniveaus der Atome; wie in Baustein 5 begründet.
- An der Lichtentstehung sind nur zwei Energieniveaus beteiligt.

- Bei der stimulierten Emission „fliegen“ stimulierendes und stimuliertes Photon in dieselbe Richtung. Dies wird hier nicht näher begründet, da die zugrundeliegenden quantenoptischen Überlegungen im Rahmen der Schulphysik nicht behandelt werden können.

Zu Beginn des Bausteins wird der Stickstoff-Laser noch einmal kurz vorgeführt und die Frage der Hausaufgabe nach den beiden Überschlüssen geklärt: Da der Abstand der Laserplatten geringer ist als die Funkenstrecke, liegt am Laserkanal eine Spannung, die viel größer ist als die eigentlich nötige Zündspannung. Durch die Kondensatoranordnung steht außerdem eine große Ladung zum Überschlag zur Verfügung. Beides sorgt dafür, dass sich eine Vielzahl von Überschlüssen entlang des gesamten Kanals ausbildet.

Um die Lichtentstehung zu verstehen, beginnt man am besten beim Namen des Lasers. Der Stickstoff-Anteil der Luft beträgt 77,1%, weshalb man modellhaft davon ausgehen kann, dass sich nur Stickstoff-Moleküle im Laserkanal befinden. Für das Modell benötigt man zwei Niveaus: ein „oberes Niveau“ und ein „unteres Niveau“.

An dieser Stelle wird das Modell mit magnetisch haftenden Symbolen auf der Tafel gezeigt (vgl. Abb. 4).

Anhand dieses Modells werden die drei Wechselwirkungsprozesse zwischen Stickstoff-Molekülen und Licht besprochen:

- Absorption (Abb. 5a): Das Stickstoff-Molekül kann ein Photon passender Energie E absorbieren und springt dabei vom unteren ins obere Energieniveau.
- Spontane Emission (Abb. 5b): Befindet sich das Stickstoff-Molekül im oberen Energieniveau, so fällt es nach einer nicht vorhersagbaren Zeitspanne spontan ins untere Niveau zurück und sendet ein Photon aus. Das Photon besitzt dieselbe Energie E wie das zuvor absorbierte.
- Stimulierte Emission (Abb. 5c): Trifft ein Photon ein Stickstoff-Molekül, das sich im oberen Energieniveau befindet, so kann es eine vorzeitige Emission stimulieren: Das Stickstoff-Molekül fällt sofort wieder ins untere Niveau zurück und sendet ein Photon aus. Das stimulierende und das entstandene Photon haben dieselbe Energie E und „laufen beide im Gleichschritt“ (Kohärenz).

Es bietet sich an, zur stimulierten Emission über die wichtige Arbeit von A. Einstein [7] zu berichten und aus seinem Brief an M. A. Besso aus dem Jahre 1916 zu zitieren: „Es ist mir ein prächtiges Licht über die Absorption und Emission der Strahlung aufgegangen.“

Anhand eines Arbeitsauftrages (vgl. Arbeitsblatt 3) sollen die Teams nun mit dem Modell spielen, die Laserbedingung (Besetzungsinversion) entdecken und die Funktion des Überschlages im Stickstoff-Laser verstehen. Dafür kann man den Teams kleine Versionen des Pfeilmodells zum Spielen zur Verfügung stellen.

Die Schülerinnen und Schüler brauchen etwas Zeit, um ein Gefühl für das Modell zu bekommen. Dann aber werden sie kreativ, spielen mehrere Simulationen durch und entdecken schnell, wie eine große Photonenzahl zu erreichen ist (vgl. Lösung zum Arbeitsblatt 3). Dass eine Besetzungsinversion durch Erwärmen nicht funktioniert, aber durch den Funkenüberschlag ersetzt werden kann, bereitet den Teams wenig Schwierigkeiten.

Nach der Teamarbeit tragen die Schülerinnen und Schüler ihre Ergebnisse vor und erklären die einzelnen Abläufe mit Hilfe des großen Modells an der Tafel. Dabei sollte auch auf die Richtung des Lichtpulses eingegangen werden. Eine Schülerin hat dies z.B. so erklärt: „Der Kanal ist doch an einer Seite enger. Dort werden die Moleküle zuerst ins obere Niveau gehoben. Also fallen sie dort wahrscheinlich früher wieder runter und starten den Lichtpuls.“

Nun sollen die Schülerinnen und Schüler nach einer Definition für den Laser suchen. Eine typische Antwort lautet „Gerät zur Lichterzeugung durch stimulierte Emission“. Dies passt sehr gut zum englischen Akronym: Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation.

Zum Abschluss des Bausteins wird nochmals darauf eingegangen, dass die Entstehung des Laserlichtes „nur“ anhand eines Modells erklärt werden konnte, in dem mehrere Annahmen stecken. Um diese Erklärung wirklich zu verstehen, muss also auch noch diesen Annahmen auf den Grund gegangen werden. Dazu sollen sich die Schülerinnen und Schüler als Hausaufgabe überlegen, welche Annahmen dem Modell zu Grunde liegen.

Baustein 5: Wird Licht von Atomen tatsächlich absorbiert und emittiert?

In diesem Baustein sollen die Schülerinnen und Schüler Spektrallinien kennen lernen, indem sie die Absorption und Emission von Photonen verstehen und an-

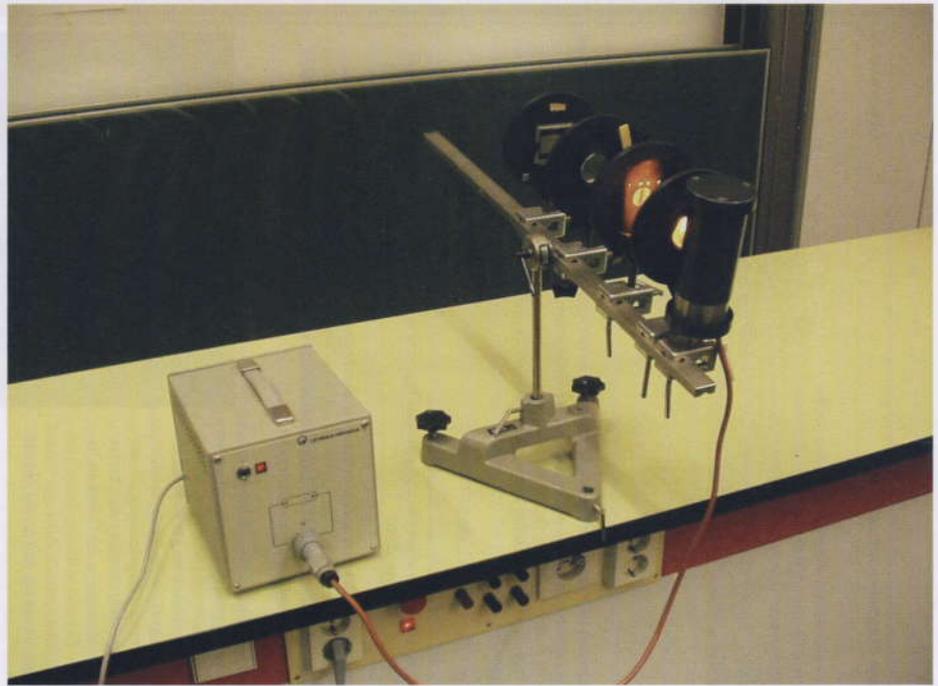


Abb. 6: Untersuchung der Spektren verschiedener Lichtquellen

hand der Balmer-Serie des Wasserstoffs den Zusammenhang zwischen diskreten Energieniveaus und Spektrallinien erkennen.

Der Baustein beginnt mit einer kurzen Erinnerung an das Modell zum Laserlicht. Welche Annahmen stecken in diesem Modell?

- Atome und Moleküle besitzen diskrete Energieniveaus.
- Atome senden Photonen aus und nehmen Photonen auf.
- Photonen werden „nach rechts“ emittiert.

Im Folgenden werden die ersten beiden Annahmen begründet, um somit den Stickstoff-Laser vollständig erklären zu können. Die dritte Annahme kann jedoch erst an der Universität begründet werden.

Das Thema dieses Bausteins ist somit die Begründung der Emission und Absorption von Licht durch Atome. Der zentrale Versuch dazu ist die Untersuchung der Spektren verschiedener Lichtquellen. Dazu wird ein beleuchteter Spalt mit Hilfe eines Gitters auf die Wand projiziert (vgl. Abb. 6).

Damit werden qualitativ die Spektren einer Glühlampe, einer Natrium-Dampf-lampe, eines Laserpointers und einer Quecksilber-Dampf-lampe untersucht. Die Schülerinnen und Schüler zeichnen die Spektren, die sie beobachten können. Anhand einer Spektraltafel kann in diesem Zusammenhang auch auf die Spektralanalyse eingegangen werden.

Im nächsten Schritt wird die Absorption von Photonen begründet: Man baut die

Natrium-Dampf-lampe wieder in den Versuchsaufbau ein, bringt mit dem Bunsenbrenner ein Magnesiastäbchen zum Glühen und taucht es in Kochsalz. Erhitzt man im Strahlengang das Kochsalz auf dem Stäbchen mit dem Bunsenbrenner, so erscheint die gelbe Natrium-Linie sichtbar dunkler auf der Wand.

Über Gasentladungen und die Balmer-Serie des Wasserstoffs kommt man zum zweiten Modell, den diskreten Energieniveaus. Der „Quantensprung“ erklärt das Pfeilmodell auf einer tiefer liegenden Modellebene.

Baustein 6: Warum ist die Energie in Atomen gequantelt?

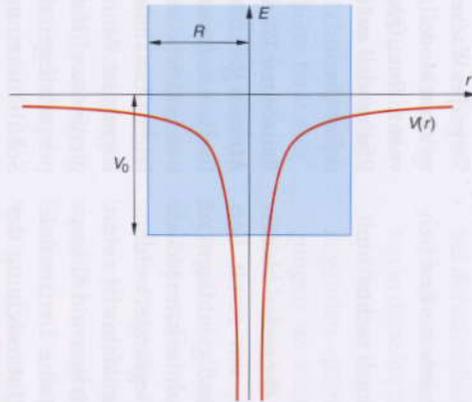
In diesem Baustein sollen die Schülerinnen und Schüler verstehen, dass auch die letzte Annahme des Laserlicht-Modells korrekt ist: Atome besitzen diskrete Energieniveaus. Dieser Baustein ist als Gruppenpuzzle gestaltet. Es empfiehlt sich, den Schülerinnen und Schülern während des Gruppenpuzzles eine „Bibliothek“ mit Büchern zum Thema Atom- und Quantenphysik (Schulbücher, Universitätsbücher und populärwissenschaftliche Bücher) zur Verfügung zu stellen.

- Abschied vom Bohr'schen Atommodell (nach [8] und [9]): Mithilfe dieses Arbeitsauftrages (vgl. Arbeitsblatt 4a) soll die Expertengruppe verstehen, warum das Bohr'sche Atommodell mit seinen festen Elektronenbahnen nicht richtig sein kann. Als erstes Gegenargument sollen die Schülerinnen und Schüler herausfinden, dass Elektronen auf

Sie sollen mithilfe dieses Arbeitsauftrages herausfinden, welche Energien das Elektron im Wasserstoffatom annehmen kann und warum das Energiestufenbild für die Erklärung der Spektrallinien des Wasserstoffs.

1) **Coulomb-Potential:** Das Wasserstoffatom ist das einfachste aller Atome, da es nur ein Elektron und ein Proton enthält, die sich wegen ihrer unterschiedlichen Ladung anziehen. Warum kann man modellhaft annehmen, dass sich das Elektron im Coulomb-Potential $V(r)$ des Protons bewegt? Geben Sie das Potential $V(r)$ an!

Nun müsste man die Schrödingergleichung für dieses Potential lösen, was aber mit den mathematischen Möglichkeiten in der Schule leider nicht geht. Daher basteln wir uns ein einfacheres Modell: Wir wählen einen dreidimensionalen kastenförmigen Potentialtopf mit unendlich hohen Potentialwänden und geschickt gewählter Breite und Tiefe.



2) **Potentialtopf-Breite R:** In der klassischen Physik kann sich eine in einem Coulomb-Potential gebundene Ladung nicht beliebig weit nach außen bewegen. Wie im Gravitationsfeld (beim senkrechten Wurf) gibt es in einem gewissen Abstand R einen Umkehrpunkt. Er ist dadurch gekennzeichnet, dass die kinetische Energie Null ist. Die Gesamtenergie E_{ges} ist dann gleich der potentiellen Energie. Bestimmen Sie den Abstand R für das Coulomb-Potential!

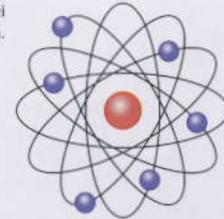
3) **Potentialtopf-Tiefe V_0 :** Wie würden Sie ein mittleres Potential V_0 wählen? Welche Probleme ergeben sich dabei? In unserem Modell wählen wir V_0 so, dass es dem Wert des Coulomb-Potentials an der Stelle $\frac{1}{2}R$ entspricht. Berechnen Sie V_0 !

Wir ersetzen das Coulomb-Potential für eine Ladung der Energie E_{ges} , also durch einen kastenförmigen Potentialtopf mit unendlich hohen Potentialwänden, dessen Boden sich bei V_0 befindet und dessen Kantenlänge $2R$ ist.

4) **Energiestufen:** Bestimmen Sie mit diesen Angaben die Energiestufen! Finden Sie eine geeignete Proportionalität! Bestimmen Sie die Energie für $n = 1$! Zeichnen Sie ein Schaubild der Energiestufen und vergleichen Sie es mit dem Energiestufenbild für die Erklärung der Spektrallinien des Wasserstoffs!

Zusatzaufgabe: Erklären Sie genau, wie beim Stickstoff-Laser das Laserlicht entsteht!

Das Atom wird oft wie im Bild rechts als kleines Planetensystem dargestellt, bei dem die Elektronen (Planeten) auf festen Bahnen um den Kern (Sonne) kreisen. Sie sollen im Folgenden verstehen, warum diese Modellannahme falsch ist.



1) **Warum könnte es in diesem Modell keine stabilen Atome geben?** (Tipp: Hertz'scher Dipol)

Die Elektronenbahnen lassen sich auch noch auf eine zweite Weise widerlegen: Man hat festgestellt, dass man den Elektronen im Atom die Eigenschaft „Ort“ gar nicht zuschreiben kann! Sie würde nämlich der sogenannten Heisenberg'schen Unbestimmtheitsrelation widersprechen. Nach ihr ist es nicht möglich, Quantenobjekte wie z.B. Elektronen so zu präparieren, dass die Genauigkeit des Ortes Δx und die des Impulses Δp gleichzeitig beliebig klein werden. Es muss nämlich immer gelten:

$$\Delta x \Delta p \geq h/4\pi.$$

R. P. Feynman schreibt dazu in seinem Buch „QED“: So when you try to squeeze light too much to make sure it's going in only a straight line, it refuses to cooperate and begins to spread out.

2) **Angenommen, im Wasserstoffatom läuft ein Elektron auf einer Bahn um den Atomkern. Dann muss der Ort sehr genau festliegen, z. B. auf ein Zehntel des Atomdurchmessers. Berechnen Sie mit Hilfe der Heisenberg'schen Unbestimmtheitsrelation die kinetische Energie des Elektrons! Vergleichen Sie diese Energie mit der Ionisierungsenergie des Wasserstoffatoms und begründen Sie, warum das Bahnmodell damit widerlegt ist!**

Welches Atommodell verwenden die Physiker heute?

Heute darf man nicht mehr von Elektronen sprechen, die sich entlang bestimmter Bahnen bewegen. Das aktuelle (quantenphysikalische) Modell lässt nur noch Aussagen über die Wahrscheinlichkeit zu, ein Elektron an einer bestimmten Stelle zu messen. Ein eindrucksvolles Beispiel dafür zeigt das nebenstehende Bild: Man erkennt einen Quantenzaun, der aus 48 Eisenatomen auf einer Kupferunterlage besteht (Radius 7 nm). Tastet die Spitze eines Raster-Tunnel-Elektronen-Mikroskops das Gebiet ab, liefert sie die Wahrscheinlichkeit, ein Kupfer-Elektron in diesem Bereich anzutreffen. Das Bild sieht zwar aus wie eine Momentaufnahme einer Wasserwelle, hier „wellt“ jedoch nichts! Die Welle ist nur ein Bild für die Auftreffwahrscheinlichkeit!

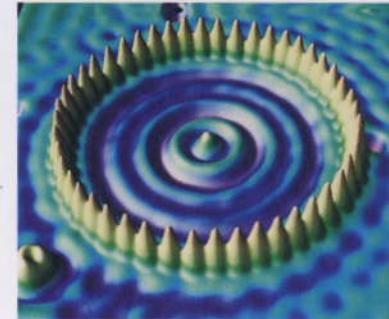


Image originally created by IBM Corporation

3) **Zeichnen Sie ein Schnittbild des Quantenzauns! Versuchen Sie, mithilfe des Programms FEYN (Unterprogramme Wellenfunktion eines Elektrons) diese Aufenthaltswahrscheinlichkeiten zu verstehen!**

Will man heute Quantenobjekte (z. B. Elektronen) beschreiben, so kann man nur noch die Wahrscheinlichkeit angeben, dieses Objekt an einer bestimmten Stelle zu finden. Wie bestimmt man diese Wahrscheinlichkeitsverteilung? Man beschreibt das Elektron mithilfe einer Wellenfunktion $\psi(x)$. Das Quadrat $\psi(x)^2$ ergibt dann die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung. Im Jahr 1926 entwickelte der österreichische Physiker Erwin Schrödinger eine (heute nach ihm benannte Gleichung), mit deren Hilfe man $\psi(x)$ bestimmen kann. Sie lautet:

$$\psi''(x) = k(-\psi(x))(E - V(x))$$

Dabei ist E die Energie des Elektrons, und $V(x)$ das Potential, in dem sich das Elektron bewegt.

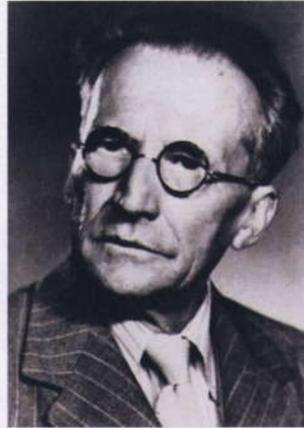
R. P. Feynman schreibt dazu: „Where did we get that from? It's not possible to derive it from anything you know. It came out of the mind of Schrödinger, invented in his struggle to find an understanding of the experimental observations of the real world.“

Zur Vereinfachung nehmen wir ein sogenanntes Kastenpotential mit unendlich hohen Wänden an: Zwischen $x = 0$ und $x = L$ kann sich das Elektron frei bewegen (Potential null); die Wahrscheinlichkeit, es außerhalb des Bereichs zu finden, ist null. An den Rändern des Bereichs ist also die Wellenfunktion $\psi(x) = 0$ (eine sogenannte Randbedingung).

- 1) Stellen Sie die Schrödingergleichung für das Elektron im Kasten ($0 < x < L$) auf! Ersetzen Sie als Vereinfachung $8\pi^2mE/h^2$ durch die neue Variable k^2 !
- 2) Zeigen Sie, dass $\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$ die Gleichung löst! (A und B sind vorerst willkürlich gewählte Konstanten.)
- 3) Verwenden Sie die Randbedingungen, um die spezielle Wellenfunktion zu finden.
- 4) Ersetzen Sie k durch den ursprünglichen Ausdruck und bestimmen Sie die möglichen (quantisierten) Energiewerte.
- 5) Um die noch fehlende Konstante A zu bestimmen (und damit die Wellenfunktion und die Wahrscheinlichkeitsverteilung), müssen Sie die Normierungsbedingung verwenden. Sie besagt, dass die Wahrscheinlichkeit 1 ist, das Elektron irgendwo im Kasten zu finden (irgendwo muss es ja sein). Berechnen Sie also

$$\int_0^L \psi(x)^2 dx = 1.$$

- 6) Geben Sie die Wellenfunktion $\psi(x)$ und die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\psi(x)^2$ an und skizzieren sie beide für $n = 1, 2, 3$.



Retrieved October 4, 2010, from Encyclopædia Britannica Online: <http://www.britannica.com/EBchecked/topic-art/528287/14148/>
Erwin-Schrodinger

Will man heute Quantenobjekte (z. B. Elektronen) beschreiben, so kann man nur noch die Wahrscheinlichkeit angeben, dieses Objekt an einer bestimmten Stelle zu finden. Wie bestimmt man diese Wahrscheinlichkeitsverteilung? Man beschreibt das Elektron mithilfe einer Wellenfunktion $\psi(x)$. Das Quadrat $\psi(x)^2$ ergibt dann die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung. Im Jahr 1926 entwickelte der österreichische Physiker Erwin Schrödinger eine (heute nach ihm benannte Gleichung), mit deren Hilfe man $\psi(x)$ bestimmen kann. Sie lautet:

$$\psi''(x) = k(-\psi(x))(E - V(x))$$

Dabei ist E die Energie des Elektrons, und $V(x)$ das Potential, in dem sich das Elektron bewegt.

R. P. Feynman schreibt dazu: „Where did we get that from? It's not possible to derive it from anything you know. It came out of the mind of Schrödinger, invented in his struggle to find an understanding of the experimental observations of the real world.“

Sie sollen nun ein Gefühl dafür bekommen, wie die Lösungen dieser Gleichung aussehen.

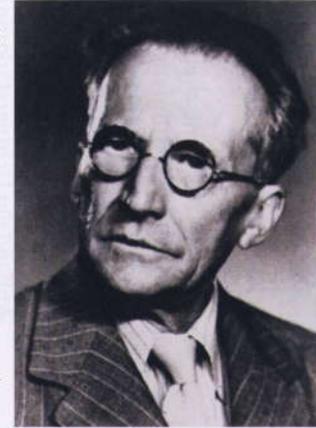
Setzen wir das Potential $V(x) = 0$. Dann gilt:

$$\psi''(x) = k(-\psi(x))(E - V(x))$$

- 1) $\psi''(x)$ könnte man als Gekrümmtheit bezeichnen (Warum?). Wie muss also eine Funktion $\psi(x)$ aussehen, deren Gekrümmtheit proportional zu $-\psi(x)$ ist?

Warum gibt es die diskreten Energieniveaus? Die Funktionen $\psi(x)$ müssen physikalisch sinnvoll sein, ihr Quadrat (Wahrscheinlichkeitsverteilung) muss außerhalb des Potentialbereichs klein sein, da man ja sonst das Elektron hauptsächlich im „verbotenen“ Bereich finden würde. Die würde den experimentellen Ergebnissen widersprechen. Man muss also dafür sorgen, dass sich eine Wellenfunktion an die x-Achse anschmiegt.

- 2) Simulieren Sie mithilfe des Programms „Schrödingers Schlange“ einen Potentialtopf mit endlicher Tiefe. Stellen Sie die Energieniveaus durch das Verschieben der Regler so genau ein, dass sich die Wellenfunktion erkennbar gut an die x-Achse anschmiegt.
- 3) Warum existieren die diskreten Energieniveaus in Atomen? (Das zugehörige Potential ist das Coulomb-Potential.)



Retrieved October 4, 2010, from Encyclopædia Britannica Online: <http://www.britannica.com/EBchecked/topic-art/528287/14148/>
Erwin-Schrodinger

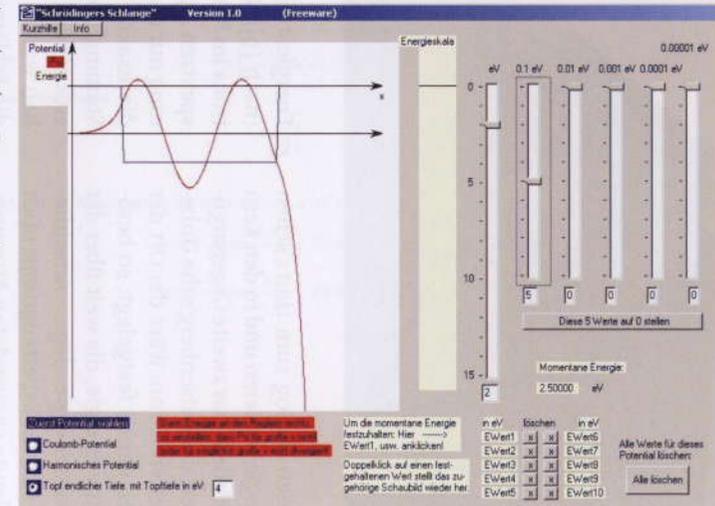




Abb. 7: Mit Lasern geschnittene Metallteile

Kreisbahnen analog zum Hertz'schen Dipol Energie verlieren und in den Kern stürzen würden. Das zweite Gegenargument liefert die Heisenberg'sche Unbestimmtheitsrelation: Wäre der Ort der Elektronen genau festgelegt, so besäßen sie eine Energie, die weit über der Ionisierungsenergie läge. Anschließend soll sich die Expertengruppe noch mit dem heute verwendeten Atommodell beschäftigen und anhand des Computerprogramms „Feyn“ von M. Amelunxen die Wellendarstellung und Wahrscheinlichkeitsverteilungen kennen lernen.

- Die Schrödingergleichung per Hand (nach [9]): Diese Expertengruppe soll die Schrödingergleichung für ein Elektron im unendlich tiefen Potentialtopf lösen und damit die Energiequantisierung begründen (vgl. Arbeitsblatt 4c). Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist vorgegeben, um die Aufgabe nicht übermäßig schwierig zu machen. Am Ende des Arbeitsauftrages sollen die Wellenfunktionen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die ersten drei Quantenzahlen skizziert werden.
- Die Schrödingergleichung per Computer (nach [10]): Im Gegensatz zur zweiten Expertengruppe soll dieses Team selbst herausfinden, dass Lösungen für die Schrödingergleichung Wellen sein müssen (vgl. Arbeitsblatt 4c). Die Wellenfunktion ist nämlich proportional zu ihrer Gekrümmtheit. Im zweiten Schritt sollen die Schülerinnen und Schüler verstehen, dass nicht alle Lösungen der Schrödingergleichung physikalisch sinnvoll sind, da sie auch noch Normierungsbedingung erfüllen müssen. Die sinnvollen Lösungen kann man sehr anschaulich mit dem Programm „Schrödingers Schlange“ von J. Küblbeck entwickeln. Auch die Energiequantisierung wird damit deutlich gemacht.

- Energiestufen des Wasserstoffatoms (nach [9]): Das Atommodell des Elektrons im Potentialtopf kann die Linienspektren durch die Energiequantisierung nur qualitativ erklären, nicht aber die exakte Form des Spektrums. Die Stammgruppen sollen daher ein genaueres Modell verwenden, um zu verstehen warum das Energiestufenbild für die Erklärung der Balmerreihe korrekt ist (vgl. Arbeitsblatt 4). Dazu müssten sie eigentlich die Schrödingergleichung für das Coulomb-Potential lösen. Dies ist im Rahmen der Schulmathematik jedoch nicht möglich. Man kann aber ein Modell-Potential verwenden, das dem Coulomb-Potential möglichst ähnlich ist, für das die Schülerinnen und Schüler die Schrödinger-Gleichung aber exakt lösen können. Alle Näherungen, die während der Rechnung gemacht werden müssen, betreffen nur die Form des Potentials und können deshalb im Rahmen der klassischen Physik erklärt werden. Die anschließende quantenmechanische Rechnung kommt dann ohne Näherungen aus.

Damit ist die Form der Energiestufen aus dem Modell zur Erklärung der Spektrallinien (vgl. Baustein 5) bestätigt. Insgesamt sind somit alle Annahmen begründet, die im Modell zur Entstehung des Laserlichts (vgl. Baustein 4) steckten. Der Stickstoff-Laser ist damit im Rahmen der Schulphysik vollständig erklärt.

Baustein 7: Der Helium-Neon-Laser

In diesem Baustein soll das in den vorangegangenen Bausteinen gesammelte Wissen angewendet werden, um einen zweiten Lasertyp zu erklären, den die Schülerinnen und Schüler aus dem Physikunterricht kennen, den Helium-Neon-Laser.

Der Stickstoff-Laser und der Helium-Neon-Laser werden parallel in Betrieb genommen und ihre Unterschiede diskutiert:

- Der Helium-Neon-Laser knallt nicht.
- Er sendet rotes Licht.
- Er leuchtet kontinuierlich.
- Er ist intensiver.

Nun können das Termschema von Helium und Neon, die stattfindenden Stoß- und Emissionsprozesse sowie die Bedeutung der unterschiedlichen Lebensdauern der einzelnen Energieniveaus erarbeitet werden.

Anhand der Lichtverstärkung durch die Spiegelanordnung wird erklärt, warum Laser so „intensiv“ sein können. Zur Verdeutlichung können beispielsweise Metallteile gezeigt werden, die mit Lasern geschnitten wurden (vgl. Abb. 7). Damit ist der Kreis von den Anwendungen des Lasers aus dem ersten Baustein über die Funktionsweisen und physikalischen Modelle wieder hin zu tatsächlich mit Lasern bearbeiteten Materialien geschlossen – und die Unterrichtseinheit beendet. ■

Literatur

- [1] A. Merli, J. Göller, V. Nordmeier: *Selbstbau eines Stickstofflasers mit einfachen Materialien – und Ausbau zum Farbstofflaser. Praxis der Naturwissenschaften – Physik in der Schule* 8/59 (2010), 25–27.
- [2] M. Lichtfeldt, F. H. Kühling: *Didaktische Vorteile eines offenen Lasersystems. In Behrendt, H. (Hrsg.): Zur Didaktik der Physik und Chemie* (1995), 241–243.
- [3] H. H. Lewinsky: *Der Laser in der S1: Laser zum selber bauen, Praxis der Naturwissenschaften – Physik in der Schule* 1/50, 11–14 (2001).
- [4] F. Karsten: *Ein Stickstoff-Laser zum Selbstbauen, AATIS Praxisheft* 18 (2008).
- [5] M. Wagenschein: *Verstehen lehren*, Beltz, Weinheim, 1968.
- [6] P. Brockhaus: *Der Laser in der S1: Ein Unterrichtskonzept. – Praxis der Naturwissenschaften – Physik in der Schule* 1/50, 15–18 (2001).
- [7] A. Einstein: *Zur Quantentheorie der Strahlung. Physik. Z.* 18, 121 (1917).
- [8] F. Kranzinger: *Impulse Quantenphysik*, Klett, Stuttgart, 2002.
- [9] H. Wiesner, R. Müller: *Das Münchener Unterrichtskonzept zur Quantenmechanik*, <http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~milq/>
- [10] J. Küblbeck: *Energieniveaus und Orbitale. – Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* 55/1, 7–12 (2002).

Anschrift des Verfassers:

StD Florian Karsten, Immanuel-Kant-Gymnasium, Leinfelden-Echterdingen, Staatliches Seminar für Didaktik und Lehrerbildung (Gymnasien) Stuttgart, E-Mail: karsten@seminar-stuttgart.de

Lösungshinweise: Energiestufen des Wasserstoffatoms

Lösungen 4

1) Das Proton ist fast zweitausend mal schwerer als das Elektron, und es zeigt sich im Experiment, dass es auf einen sehr kleinen Raumbereich konzentriert ist. Für unser Modell des Wasserstoff-Atoms können wir also annehmen, dass sich das Elektron im Coulomb-Potential des Kerns aufhält:

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

2) R hängt von der Gesamtenergie ab, da:

$$E_{\text{ges}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow R = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 E_{\text{ges}}}$$

3) Es liegt nahe, V_0 so zu wählen, dass es die „mittlere Tiefe“ des Coulomb-Potentials darstellt. Hier ergibt sich zunächst eine Schwierigkeit, weil das Coulomb-Potential am Nullpunkt divergiert. Wie soll man in diesem Fall eine „mittlere Tiefe“ bestimmen? Es handelt sich jedoch nicht um eine echte Divergenz, denn durch die endliche Ausdehnung des Kerns wird das Potential am Rand des Kerns „abgeschnitten“ und nimmt einen endlichen Wert an.

$$V_0 = V\left(r = \frac{1}{2}R\right) = V\left(-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 E_{\text{ges}}}\right) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{8\pi\epsilon_0 E_{\text{ges}}}{e^2} = 2E_{\text{ges}}$$

4) Es gilt ja (vgl. Expertengruppen):

$$E_{\text{ges}} = \frac{n^2 h^2}{8mL^2} + V_0 \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

Setzt man L und V_0 ein so ergibt sich:

$$E_{\text{ges}} = \frac{n^2 h^2}{8m \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 E_{\text{ges}}}\right)^2} + 2E_{\text{ges}}$$

Dies kann man umformen zu:

$$E_{\text{ges}} = \frac{me^4}{2n^2 h^2 \pi^2 \epsilon_0^2}$$

Also ergibt sich die Proportionalität:

$$E_{\text{ges}} \sim \frac{1}{n^2}$$

Lösungshinweise: Der Abschied vom Bohr'schen Atommodell

Lösungen 4a

1) In diesem Planetenmodell bewegen sich die Elektronen auf Kreisbahnen. Sie müssten also ständig beschleunigt werden. Beschleunigte Ladungen strahlen jedoch elektromagnetische Wellen ab (vgl. Hertz'scher Dipol) und müssten damit Energie verlieren. Die Elektronen müssten daher nach kurzer Zeit in den Kern stürzen. Stabile Atome, wie wir sie kennen, wären also nicht möglich!

2) Aus $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$ und $p = mv$ folgt

$$E_{\text{kin}} = p^2 / (2m)$$

Setzt man statt p jetzt Δp ein, so muss man E_{kin} als mittlere Energie interpretieren. Löst man $\Delta x \Delta p \geq h/4\pi$ nach Δp auf, so erhält man $\Delta p \geq h/(4\pi\Delta x)$. Damit ergibt sich

$$E_{\text{kin}} \geq h^2 / (32\pi m (\Delta x)^2)$$

Setzt man nun die Annahme $\Delta x = 10^{-11}$ m (Ein Zehntel des Atomdurchmessers von 10^{-10} m) ein, so ergibt sich als mittlere kinetische Energie $E_{\text{kin}} = 95$ eV. Dies übersteigt die zur Ionisierung nötige Energie von 13,6 eV aber um ein Vielfaches. Das Atom würde sofort ionisiert und damit zerstört. Die Vorstellung von definierten Bahnen im Atom muss also aufgegeben werden.

Lösungshinweise: Die Schrödingergleichung (per Hand)

Lösungen 4b

1) Die Schrödingergleichung für das Elektron im Kasten lautet:

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{8\pi m} \psi''(x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq L$$

Mit der neuen Variablen k ergibt sich die Gleichung zu:

$$\psi''(x) = -k^2 \psi(x)$$

2) $\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$ löst die Gleichung, da

$$(A \sin(kx) + B \cos(kx))'' = -k^2(A \sin(kx) + B \cos(kx))$$

$$-k^2(A \sin(kx) + B \cos(kx)) = -k^2(A \sin(kx) + B \cos(kx))$$

3) Am linken und rechten Rand muss die Wellenfunktion $\psi(x)$ verschwinden. Damit folgt:

$$\psi(x=0) = A \sin(0) + B \cos(0) = 0;$$

$$A \cdot 0 + B \cdot 1 = 0;$$

$$B = 0$$

Am rechten Rand gilt $\psi(x=L) = A \sin(kL) = 0$. Die Wellenfunktion darf nicht überall verschwinden. Der Faktor A kann daher nicht Null sein. Also muss man den Faktor $\sin(kL)$ gleich Null setzen. Dies ist immer dann erfüllt, wenn kL ein ganzzahliges Vielfaches von π ist. Die Lösung sind also alle Wellenfunktionen, die folgender Bedingung genügen:

$$k = \frac{n\pi}{L} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

4) Ersetzt man k durch den ursprünglichen Ausdruck, so ergeben sich die quantisierten Energiewerte zu:

$$E_n = n^2 \frac{\hbar^2}{8mL^2} \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

5) Aus dem Integral

$$\int_0^L \psi(x)^2 dx = 1$$

erhält man die noch fehlende Konstante

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

6) Die Wellenfunktion $\psi(x)$ und die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\psi(x)^2$ lauten.

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\psi(x)^2 = \frac{2}{L} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \text{für } n = 1, 2, 3, \dots$$